1. Définition

La méthode des arbres dans la logique des prédicats est une méthode pour vérifier des raisonnements logiques qui portent sur des quantificateurs.

2. Principe

Avec la logique des prédicats nous avons vu l'introduction de quantificateurs qui nous permettent de faire des affirmations au sujet d'une, de plusieurs ou de tous les individus. Ainsi, pour tester la validité d'un raisonnement en logique des prédicats, il faut introduire deux règles nouvelles :

a) Spécialisation Existentielle

Si on a

(∃x) Sx [il existe au moins un individu « x », qui a la propriété « S »]

alors on peut déduire qu'il y a au moins une spécialisation possible (a ou b ou c ou…). On est donc autorisé à faire une seule spécialisation. Nous avons donc :

(∃x) Sx ➔ Sa

La spécialisation est seulement possible pour des individus n'ayant pas encore été utilisés dans le contexte du raisonnement à vérifier.

Si on a donc une deuxième existentielle

(∃x) Px [il existe au moins un individu « x », qui a la propriété «P»]

il faut la spécialiser de la manière suivante :

(∃x) Px ➔ Pb

b) Spécialisation Universelle

Si on a

(∀x) Rx [tout individu « x » a la propriété « R »]

alors on peut en déduire que tout individu quelconque a, b, c, etc… a nécessairement la propriété « R ». Nous avons donc :

(∀x) Rx ➔ Ra

Puisque nous avons encore une deuxième existentielle, il faut y ajouter :

(∀x) Rx ➔ Ra

Rb

3. De la transcription des prédicats à la logique des arbres

La méthode des arbres dans la logique des prédicats se fait en trois étapes :

a) La transformation

1. Copier les prémisses les unes à la suite des autres.
2. Ajouter la conclusion sous forme niée.
3. Si une formule contient plusieurs quantificateurs, il faut la décomposer selon les règles de décomposition (les existentielles avant les universelles). Par exemple :

$$(\forall x)\ Ax \rightarrow (\exists x)\ Bx$$

$$\overline{(\forall x)\ Ax} \qquad\qquad (\exists x)\ Bx$$

4. Transformer les quantificateurs niés en quantificateurs non-niés conformément à la règle de transformation suivante :

$$\overline{(\forall x)Ax} \leftrightarrow (\exists x)\overline{Ax}$$
$$\overline{(\exists x)Ax} \leftrightarrow (\forall x)\overline{Ax}$$
$$\overline{(\forall x)\overline{Ax}} \leftrightarrow (\exists x)Ax$$
$$\overline{(\exists x)\overline{Ax}} \leftrightarrow (\forall x)Ax$$

5. Déterminer le nombre d'existentielles.

b) La modélisation

6. Spécifier toutes les existentielles en introduisant dans chaque existentielle une constante différente (a, b, c, etc…). Par exemple :

$$(\exists x)\ Ax \leftrightarrow Bx \quad \Rightarrow \quad Aa \leftrightarrow Ba$$

$$(\exists x)\ Cx \vee Dx \quad \Rightarrow \quad Cb \vee Db$$

7. Introduire toutes les constantes spécifiées (a, b, c, etc…) dans chaque universelle. Par exemple :

$$(\forall x)\ Rx \wedge Qx \quad \Rightarrow \quad Ra \wedge Qa$$

$$Rb \wedge Qb$$

c) La vérification

8. Résoudre l'exercice en utilisant les règles de décomposition de la méthode des arbres.

4. Exemples

4.1.

prémisses

$(\exists x)\, Px;\ (\forall x)\,[Px \to Qx] \ \vdash\ (\exists x)\, Qx$ ← conclusion

2 Existentielles et 1 Universelle

Arbre de vérification

Étape 1

Copiez les **prémisses** l'une en dessous de l'autre.

$\boxed{(\exists x)\, Px}$ ✔ 2

$(\forall x)\,[Px \to Qx]$ ✔ 4

Étape 2

Ajoutez la **conclusion** **niée**.

$\overline{(\exists x)\, Qx}$ ✔ 1

Transformation

Étape 3

Si une formule contient **plusieurs quantificateurs**, il faut la **décomposer.** Ici, aucune formule ne contient plusieurs quantificateurs.

Étape 4

Transformer les quantificateurs niés en **quantificateurs non-niés**.

$(\forall x)\, \overline{Qx}$ ✔ 3

Modélisation

Étape 5

Déterminer le **nombre d'existentielles**. Ici il y a seulement une existentielle.

$\boxed{Pa}$

$\overline{Qa}$

$Pa \to Qa$ ✔ 5

Étape 6 + 7

On introduit les **constantes spécifiées** dans **chaque universelle**. Ici on a qu'une seule constante.

Vérification

Étape 8

Nous terminons la vérification en utilisant des **règles de décomposition**.

$\overline{Pa}$	Qa
X	X

Toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est donc valide.

4.2.

$$(\forall x)\,[Ax \rightarrow Bx]\ ;\quad (\forall x)\,[\overline{Ax} \rightarrow \overline{Cx}]\ ;\quad (\exists x)\,[Ax \wedge Ex] \wedge (\forall x)\,[\overline{Cx} \rightarrow \overline{Ex}]\ ;\ (\exists x)\,[Cx \wedge \overline{Bx}]$$
$$\vdash (\exists x)\,[Bx \rightarrow Ax]$$

Arbre de vérification

Étape 1

Copiez les **prémisses** l'une en dessous de l'autre.

Étape 2

Ajoutez la **conclusion** **niée**.

$(\forall x)\,[Ax \rightarrow Bx]$ ✓ 5
$(\forall x)\,[\overline{Ax} \rightarrow \overline{Cx}]$ ✓ 6
$(\exists x)\,[Ax \wedge Ex] \wedge (\forall x)\,[\overline{Cx} \rightarrow \overline{Ex}]$ ✓ 2
$(\exists x)\,[Cx \wedge \overline{Bx}]$ ✓ 3

$\overline{(\exists x)\,[Bx \rightarrow Ax]}$ ✓ 1

Transformation

Étape 3 + 4

Transformer les quantificateurs niés en **quantificateurs non-niés** et **décomposer** les formules qui contiennent **plusieurs quantificateurs**.

$(\forall x)\,\overline{Bx \rightarrow Ax}$ ✓ 7
$(\exists x)\,[Ax \wedge Ex]$ ✓ 4
$(\forall x)\,[\overline{Cx} \rightarrow \overline{Ex}]$ ✓ 8

Modélisation

Étape 5

Déterminer le **nombre d'existentielles**.
Ici il y a **2 existentielles**.

Étape 6

On introduit les **constantes spécifiées** dans **chaque universelle (a et b)**.

Étape 7

Introduire toutes les constantes spécifiées (a et b) dans **chaque universelle**.

$Ca \wedge \overline{Ba}$ ✓ 9
$Ab \wedge Eb$

$Aa \rightarrow Ba$ ✓ 10
$Ab \rightarrow Bb$
$\overline{Aa} \rightarrow \overline{Ca}$ ✓ 11
$\overline{Ab} \rightarrow \overline{Cb}$
$\overline{Ba \rightarrow Aa}$
$\overline{Bb \rightarrow Ab}$
$\overline{Ca} \rightarrow \overline{Ea}$
$\overline{Cb} \rightarrow \overline{Eb}$

Vérification

Étape 8

Nous terminons la vérification en utilisant des **règles de décomposition**.

Ca
$\overline{Ba}$

$\overline{Aa}$ | Ba X

Aa X | $\overline{Ca}$ X

Nous vérifions les expressions du modèle individu par individu.
Conseil: ce n'est pas forcément avec l'individu **«a» que l'on ferme plus vite!**

Toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est donc valide.

PMA 2 $(\forall x)\,[Cx \rightarrow (Sx \vee Tx)];\ (\forall x)\,[Sx \rightarrow Nx];\ \overline{(\forall x)[Cx \rightarrow Nx]}$

1988 (2) $\vdash\ (\exists x)\,[Cx \wedge Tx]$

valide

PMA 19 $(\forall x)\,[\,\overline{Ax} \vee (Bx \vee Cx)];\ (\exists x)\,[Ax \wedge Bx];\ \overline{(\forall x)[Ax \rightarrow Bx]}$

1996 (1) $\vdash\ (\exists x)\,[Ax \wedge Cx]$

valide, ∃ multiples

PMA 23 $(\exists x)\ [Ax];\ (\exists x)\ [Ax] \rightarrow \overline{(\exists x)Bx}\ ;\ (\forall x)\ [\overline{Bx} \rightarrow (Cx \rightarrow Dx)]$

1997 (2) $\vdash\ (\forall x)\ [Cx \rightarrow Dx]$

valide, ∃ multiples

PMA 29 $(\forall x)\ [Ax \rightarrow \overline{Cx}\,] \wedge (\exists x)\ [\ Cx \wedge Dx];\ (\forall x)\ [Dx \leftrightarrow Ax];\ (\exists x)\ Ax$

2000 (2) $\vdash\ (\exists x)\ \overline{Cx} \vee (\exists x)\ \overline{Dx}$

valide, ∃ multiples